9. Clase 9. Números Complejos

En el enfoque del estudio de los números complejos consideramos el conjunto de todos los pares ordenados de números reales. Un par ordenado de números reales se denota por (a, b).

Definición 9.1. El sistema $\mathbb{C}$ de números complejos es el conjunto de todos los pares ordenados de números reales con dos operaciones binarias que llamamos suma, denotada por $+$, y multiplicación, denotada por $\cdot$, tales que las siguientes reglas se cumplan:

I $(a, b) = (c, d)$ si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

II $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.

III $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Este sistema de números complejos también satisfacen las propiedades conocidas de la suma y el producto que tiene por ejemplo el campo (cuerpo) de los números reales $\mathbb{R}$. Entre los números complejos de la forma $(a, 0)$ y los números reales se puede establecer un isomorfismo. Para ello definimos la función $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}_0$ por $\varphi(a) = (a, 0)$, donde $\mathbb{C}_0 = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$. Esta función es biyectiva y preserva las operaciones de la suma y el producto

I $\varphi(a + b) = (a + b, 0) = (a, 0) + (b, 0) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

II $\varphi(ab) = (ab, 0)$, $\varphi(a)\varphi(b) = (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$, luego $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

III φ es inyectiva: $\varphi(a) = \varphi(b)$ indica que (a,0)=(b,0), luego $a = b$.

IV φ es sobreyectiva: para $(a, 0) \in \mathbb{C}_0$, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(a) = (a, 0)$

Así podemos identificar el número real a con el número complejo $(a, 0)$, en particular $(0, 0) \equiv 0$, escribiendo que $(a, 0) = a$.

Denotemos $(0, 1)$ por i, i=(0,1), vemos que $i^2 = i \cdot i = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$.

También $a+ib = (a, 0)+(b, 0)(0, 1) = (a, 0)+(0, b) = (a, b)$, así la llamada forma binomial $a + ib = (a, b)$. En el número complejo (a, b), se dice que a es la parte real y que b es la componente (parte) imaginaria. Los números complejos de la forma $(0, b) = 0 + ib = ib$ se dicen imaginarios puros. El número complejo $a + ib$ se dirá imaginario si $b \neq 0$

Teorema 9.2. Dados dos números complejos $z = (a, b)$, $w = (c, d)$, $w \neq 0$, existe un único complejo $\alpha = (a, y)$ tal que $w\alpha = z$.

Demostración : La demostración es sencilla. Basta efectuar $w\alpha = (c, d)(x, y) = (a, b)$, con $c^2 + d^2 \neq 0$ $(w \neq 0)$, (cx-dy,cy+dx)=(a,b). Luego el sistema $cx - dy = a$ y $cy + dx = b$ se resuelve y obtenemos $x = \frac{ac-bd}{c^2+d^2}$ y $y = \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$. □

Definición 9.3 (Diveisión, cociente)**.** Dados dos números complejos z y w, $w \neq 0$, su cociente, denotado por $\frac{z}{w}$, se define como el número complejo α tal que $w\alpha = z$. Si $z = (a, b)$, $w = (c, d)$, entonces $\frac{z}{w} = (\frac{ac-bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2})$

Definición 9.4 (Complejo conjugado)**.** El conjugado $\bar{z}$ de un número complejo $z = a + ib$ es dado por $\bar{z} = a - ib = (a, -b)$.

Las propiedades son inmediatas

a) $\overline{a \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$

b) $\overline{a \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$

c) $\overline{(\frac{a}{w})} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$

d) $\bar{\bar{z}} = z$

Definición 9.5 (Módulo)**.** El valor absoluto o módulo de un número complejo $z = a + ib$, denotado $|z|$, se define por $|z| = \sqrt{z^2 + b^2}$

Algunas propiedades del módulo serían

a) $|z| = |\bar{z}|$, $z\bar{z} = |z|^2$, $|\Re(z)| \leq |z|$, $|\Im(z)| \leq |z|$, $2\Re(z) = z + \bar{z}$

b) $|zw| = |z||w|$

c) $|z + w| \leq |z| + |w|$, y $||z| - |w|| \leq |z - w|$

Las demostraciones son sencillas, por ejemplo en (c):

Demostración :

$$\begin{aligned}
|z - w|^2 &= (z - w)\overline{(z - w)} = (z - w)(\bar{z} - \bar{w}) \\
&= z\bar{z} - z\bar{w} - w\bar{z} + w\bar{w} = |z|^2 - (z\bar{w} + \overline{z\bar{w}}) + |w|^2 \\
&= |z|^2 - 2\Re(z\bar{w}) + |w|^2 \geq |z|^2 - 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\
&= |z|^2 - 2|z||\bar{w}| + |w|^2 = (|z| - |w|)^2
\end{aligned}$$

así $|z - w| \geq ||z| - |w||$. □

Usando el sistema de coordenadas cartesianas los números complejos se interpretan como puntos en el plano. Asociamos el nmero complejo $z = (x, y)$ con el punto $P(x, y)$. Denotando la longitud del vector $\overrightarrow{OP}$ que une el origen y el punto P con la recta r y con θ el ángulo entre el eje positivo real x y el vector $\overrightarrow{OP}$ con la convención usual de rotación: θ es positiva con rotación contraria al movimiento de las agujas del reloj, negativa en el otro sentido, diremos que θ es el argumento del número complejo z y se denota $\theta = \arg(z)$ (ver (17)) Usando coordenadas polares (r, θ) se tienen las ecuaciones $x = r\cos(\theta)$ y $y = r\sin(\theta)$,

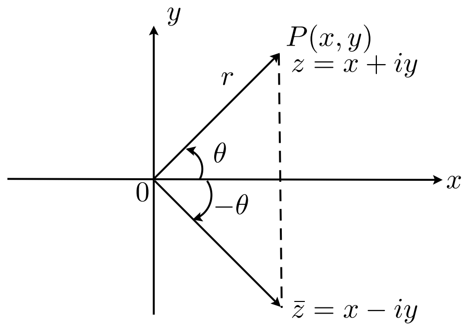

Figura 17:

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arg(z)$. Si restringimos θ al intervalo $(-\pi, pi]$ se tiene el valor principal del argumento y en lugar de $\arg(z)$ usamos $\text{Arg}\,(z)$. Nótese la discontinuidad de la función $\theta = \text{Arg}\,(z)$ en los puntos del eje real negativo y el cero.

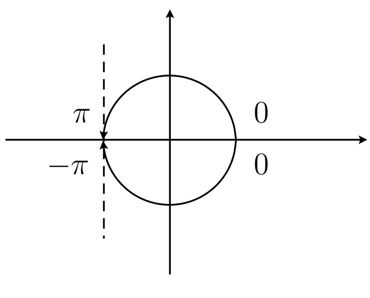

Figura 18:

Además de $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$, $\tan\theta = \tan(\text{Arg}\ z) = y/x$, es $z = x + iy = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ que es la representación polar o trigonométrica del número complejo z, $z \neq 0$.

La famosa fórmula de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ (la cual puede ser demostrada más adelante usando series) nos permite escribir la forma polar así $z = re^{i\theta}$ y geométricamente $e^{i\theta}$ representa un vector unitario ($|e^{i\theta}| = 1$) el cual ssubtiende un ángulo θ con le eje positivo x

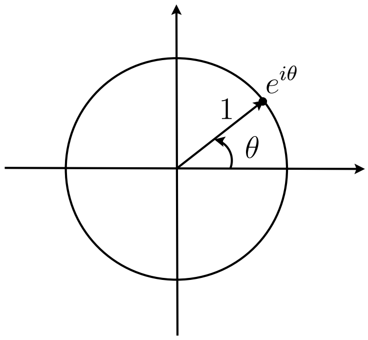

Figura 19:

Esta fórmula polar nos permitirá calcular productos, potencias y raíces de los números complejos con cierta facilidad. Sean $z_1 = re^{i\theta}$ y $z_2 = \rho e^{i\alpha}$, entonces

a) $z_1 z_2 = r\rho e^{i(\theta+\alpha)}$.

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{\rho} e^{i(\theta-\alpha)}$.

c) La potencia enésima del número complejo $z = re^{i\theta}$, n natural, será $z^n = r^n e^{in\theta}$, y así $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ la así llamada fórmula de De Moivre

Definición 9.6. Para cada número natural n, un número complejo w se dice la raź enésima del número complejo z si $w^n = z$. Escribimos $w = \sqrt[n]{z}$ ó $w = z^{1/n}$.

Si $z = re^{i\theta}$, suponemos que $w = \rho e^{i\alpha}$. Así $\rho^n e^{in\alpha} = re^{i\theta}$. Luego $\rho^n = r$, $\rho = \sqrt[n]{r}$ (la enésima raíz positiva real real) y de $e^{in\alpha} = e^{i\theta}$ es $\cos n\alpha + i\sin n\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$. Se obtiene que $\cos n\alpha = \cos\theta$ y $\sin n\alpha = \sin\theta$, es decir $n\alpha = \theta + 2k\pi$, k entero, $\alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$.

Las n raíces diferentes se obtienen con esta fórmula $\alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ y $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. A partir de $k = n$ $((n+1), (n+2), \ldots)$ se repiten los valores.

Ejemplo 9.7. Calcule las raíces cúbicas de la unidad. Aquí $z = 1$ y se pide calcular $\sqrt[3]{1}$

Solución. La fórmula polar es $z = 1 \cdot e^{i\theta}$, $\theta = 0$, $r = 1$, $n = 3$. De $\rho = \sqrt[3]{1}$ es $\rho = 1$. De $\alpha = \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}$ es $\alpha = k(\frac{2\pi}{3})$. $k = 0$ indica que $\alpha = 0$ y así $w_1 = 1$. Para $k = 1$ es $\alpha_1 = \frac{2\pi}{3}$, para

$k = 2$ es $\alpha_2 = \frac{4\pi}{3}$. Luego $w_2 = e^{i(\frac{2\pi}{3})}$, $w_3 = e^{i(\frac{4\pi}{3})}$, esto es, $w_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $w_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, donde usamos que $\frac{2\pi}{3} \equiv 120°$. Geométricamente y notando que de $\alpha^3 = 1$, $\alpha^3 - 1 = 0$, es decir, $(\alpha - 1)(1 + \alpha + \alpha^2) = 0$. Las dos raíces cúbicas distintas de 1 satisfacen que $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, $\alpha^2 = w^3$.

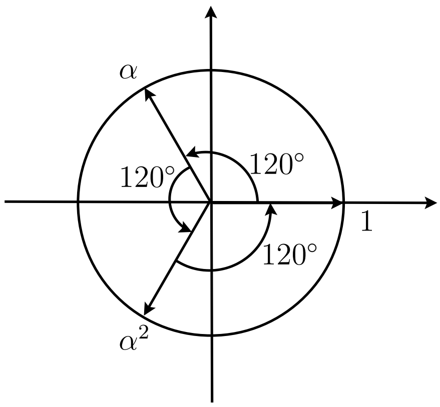

Figura 20:

Ejemplo 9.8. Identificar la región definida por la desigualdad $|z - 1| \leq |z - 2|$

Solución. Hacemos $z = x + iy$. Así $z - 1 = (x - 1) + iy$, $z - 2 = (x - 2) + iy$, $|z - 1| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, $|z - 2| = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$. Luego $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} =\leq \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$; $x^2 - 2x + 1 + y^2 \leq x^2 - 4x + 4 + y^2$, $2x \leq 3$, $x \leq 3/2$. Son todos los puntos en el plano a la izquierda de la recta vertical $x = 3/2$

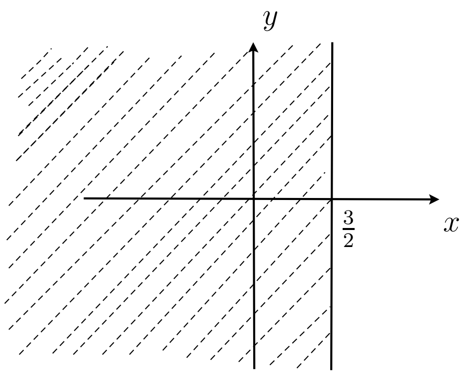

Figura 21:

Ejemplo 9.9. Sea números complejos z, w tales que $|z| = 1$. Pruebe que $\left|\dfrac{z-w}{1-\bar{w}z}\right| = 1$.

Solución. Usando que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ se tiene que $z \cdot \bar{z} = 1$. Con este "truco"sustituyendo es

$$\left|\frac{z-w}{z\bar{z}-\bar{w}z}\right| = \left|\frac{z-w}{z(\bar{z}-\bar{w})}\right| = \frac{|z-w|}{|z||\overline{z-w}|} = \frac{1}{|z|} = 1$$

donde usamos que $|\alpha| = |\bar{\alpha}|$ $(\alpha = z - w)$

10. Clase 10. Funciones Complejas

Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ un conjunto no vacío y sea una función $w = f(z)$, $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que asigna a cada elemento $z \in \mathcal{D}, \mathcal{D}$ el dominio de definición de f, un único elemento $w \in \mathcal{D}$. El rango de f es el conjunto de todas las imgenes de los elementos de $\mathcal{D}$.

Se dirá que dos funciones $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ y $g : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son iguales si $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \mathcal{D}$.

Para cada $z \in \mathcal{D}$ el valor $f(z)$ de f en z es us número complejo y podemos escribir usando la forma binómica que $f(z) = u(z) + iv(z)$, donde $u(z)$ es la parte real de f y $v(z)$ es la parte imaginaria de $f(z)$, es claro que $u : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $v : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones reales (de dos variables reales). Dada $w = f(z)$, escribiendo $z = x + iy$ se obtienen las funciones $u(x, y)$ y $v(x, y)$. Recíprocamente dada $w = u(x, y) + iv(x, y)$, entonces la sustitución $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ y $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$ en $u(x, y)$ y $v(x, y)$ nos permite obtener la f original expresada como una función de z, $w = f(z)$.

Ejemplo 10.1. Para la función $f(z) = z^2 + 1$, halle $u(z)$ y $v(z)$

Solución. Hacemos $z = x + iy$. Sustituyendo

$$\begin{aligned} f(z) &= (x + iy)^2 + 1 \\ &= x^2 + 2xyi - y^2 + 1 \\ &= (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy) \end{aligned}$$

así $u(x, y) = (x^2 - y^2 + 1)$ y $v(x, y) = 2xy$. Si $w = (x^2 - y^2 + 1) + i(2xy)$, hacemos $x = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ y $y = \dfrac{z - \bar{z}}{2}$ y sustituimos

$$\begin{aligned} w &= \left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right)^2 + 1 + i2\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z - \bar{z}}{2i}\right) \\ &= \frac{2z^2 + 2\bar{z}^2}{4} + 1 + \frac{z^2 - \bar{z}^2}{2} \\ &= \frac{2z^2}{2} + 1 = z^2 + 1 \end{aligned}$$

Definición 10.2. Si $\mathbb{N}$ denota el conjunto de los números naturales $1, 2, 3, \ldots$, una sucesió de números complejos se define por una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$. Escribiendo $f(1) = z_1$, $f(2) = z_2$,

$f(3) = z_3, \ldots,\ f(n) = z_n,\ \ldots$, diremos que z_n es el término n-ésimo de la sucesión y por brevedad usaremos la notación (z_n) para denotar dicha sucesión. La sucesión (z_n) se dice que converge al número complejo l si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N = N(\varepsilon)$ tal que $|z_n - l| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. En tal caso escribiremos $z_n \to l$ o que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = l$

10.1. Propiedades de límite

Las propiedades son similares al caso real

Teorema 10.3. I Si el límite existe, es único.

II La suma o diferencia de dos sucesiones convergentes es convergente. El producto de dos sucesiones convergente es convergente y el cociente de dos sucesiones convergentes es convergente (siempre y cuando la sucesión que está en el denominador no converja a 0). Esto lo expresamos de la siguiente manera: Si $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = l_1$ y $\lim\limits_{n\to\infty} w_n = l_2$, entonces

a) $\lim\limits_{n\to\infty} [z_n \pm w_n] = l_1 \pm l_2$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} z_n w_n = l_1 l_2$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{z_n}{w_n} = \dfrac{l_1}{l_2}$, $l_2 \neq 0$

Se dice que una sucesión (z_n) es acotada si existe una constante $u > 0$ tal que $|z_n| < u$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

III Si (z_n) es una sucesión convergente, entonces es acotada.

IV Consideremos la sucesión (z_n) donde $z_n = x_n + iy_n$, $n \in \mathbb{N}$. La sucesión (z_n) converge al límite $l = x_0 + iy_0$ si y sólo si $x_n \to x_0$ y $y_n \to y_0$. Es decir, la convergencia de la sucesión (z_n) es equivalente a la convergencia de las dos sucesiones reales $(x_n) = (\Re(z_n))$ y $(y_n) = (\Im(z_n))$.

Diremos que la sucesión de números complejos (z_n) diverge al límite ∞, escribimos $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ $(z_n \to \infty)$ si para cualquier número real $k > 0$, existe un número natural N tal que $|z_n| > k$, para todo $n > N$.

Geométricamente esta definición afirma que dado cualquier círculo con centro en $z_0 = 0$, todos los puntos z_n de la sucesión, para n suficientemente grande, están en el exterior de este círculo.

10.2. Series Numéricas de Números Complejos

Sea (z_n) una sucesión de números complejos. Formamos la sucesión de sum as parciales $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$ asociada a (z_n) por $S_1 = z_1$, $S_2 = z_1 + z_2$, $S_3 = z_1 + z_2 + z_3$, $\ldots$, $S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n$, $\ldots$.

Definición 10.4 (Series Numéricas de Números Complejos)**.** La sucesión (S_n) de sumas parciales es llamada una serie de números complejos y la representaremos por el símbolo

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n.$$

Si la sucesión (S_n) es convergente se dirá que la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ es convergente. En tal caso si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, llamaremos a S la suma de la serie y escribiremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

.

La serie se dice divergente si $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ o si dicho límite no existe.

a) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge a la suma S, $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = S\right)$, si y sólo si $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Re(z_n) = \Re(S)\right)$ y $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Im(z_n) = \Im(S)\right)$.

Las siguientes propiedades son las usuales en el caso real

b) Si $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = S$ y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n = T$ son dos series convergentes, entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[z_n \pm w_n] = S \pm T$, y $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c \cdot z_n = c \cdot S$, c constante.

El criterio de Cauchy es

c) La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número natural $N = N(\varepsilon)$ tal que $|S_n - S_m| = |z_{m+1} + z_{m+2} + \cdots + z_n| < \varepsilon$, para todos m, n naturales tales que $n > m > N$.

d) Si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ converge entonces $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

Se dice que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ es convergente.

e) Si una serie de números complejos converge absolutamente, entonces también converge.

f) Sean $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ dos series complejas. Si $|z_n| \leq |w_n|$, para todo $n > N_0$ y $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ converge absolutamente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ converge absolutamente.

g) Supongamos que (z_n) es una sucesión de números complejos y que $\lim_{n\to\infty} |\frac{z_{n+1}}{z_n}| = L$ o que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$. Si $L < 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es absolutamente convergente. Si $L > 1$ entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ es divergente.

10.3. Límites de Funciones

Consideremos una función $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y sea $z_0 \in \mathcal{D}$ o un punto en la frontera de $\mathcal{D}$.

Definición 10.5 (Límites de Funciones)**.** Se dice que el límite de la función f en el punto z_0 es l, escribiremos $\lim_{z\to z_0} f(z) = l$, si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que $z \in \mathcal{D}$ y $0 < |z - z_0| < \delta$ implican que $|f(z) - l| < \varepsilon$.

Si no existe l con esta propiedad diremos que el límite no existe.

Las propiedades de límites de funciones complejas son iguales a las del caso real:

a) Si el límite de f existe, es único.

b) Supongamos que $\lim_{z\to z_0} f(z) = l_1$ y $\lim_{z\to z_0} g(z) = l_2$, entonces:

   I) $\lim_{z\to z_0} [f(z) \pm g(z)] = l_1 + l_2$

   II) $\lim_{z\to z_0} [f(z)g(z)] = l_1 l_2$

   III) $\lim_{z\to z_0} kf(z) = kl_1$, k constante.

   IV) $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{l_1}{l_2}$, $l_2 \neq 0$

Una función p definida por $p(z) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ números complejos y $a_n \neq 0$, será llamada un polinomio de grado n.

Si $p(z)$ y $q(z)$ son polinomios, la función $f(z)$, $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ se dice una función algebráica racional.

10.4. Continuidad

Definición 10.6 (Continuidad)**.** Sea $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Sea $z_0 \in \mathcal{D}$. Se dice que f es continua en z_0 si $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Observemos que en eta definición se tienen tres condiciones: está definido $f(z_0)$, existe $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ y son iguales el límite y el valor de la función en el punto.

La función f es continua en un dominio $\mathcal{D}$ si y sólo si f es continua en todo punto de $\mathcal{D}$. Igual que en el caso real se cumplen las siguientes propiedades referidas a continuidad:

a) Sean f y g funciones complejas definidas en $\mathcal{D}$ continuas en el punto $z_0 \in \mathcal{D}$. Entonces:

   I) $f \pm g$ es continua en z_0.

   II) kf es continua en z_0, k constante.

   III) $f \cdot g$ es continua en z_0.

   IV) $\dfrac{f}{g}$ es continua en z_0, con $g(z_0) \neq 0$.

b) Sean f y g funciones complejas, $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f : \mathcal{U} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, tales que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{U}$. Si f es continua en $z_0 \in \mathcal{D}$ y si g es continua en $f(z_0)$, entonces $g \circ f$ es continua en z_0.

Ejemplo 10.7. Demuestre que $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{\bar{z}}$ no existe.

Solución. Escribimos $z = x + iy$. Así $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{z}{z} = \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{x+iy}{x-iy}$. Tomando límites iterados, encontramos que

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{x+iy}{x-iy} = \lim_{y\to 0} \frac{iy}{-iy} = -1$$

Luego no existe.

Ejemplo 10.8. Estudie la convergencia absoluta de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$

Solución. Aplicando el criterio del cociente

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = 1.$$

El criterio del cociente no decide.

Escribimos $z_n = x_n + iy_n$ donde $z_n = \dfrac{i^n}{n}$. Separando parte real y parte imaginaria se obtienen las dos series reales

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$$

estas dos series alternantes son convergentes (Leibniz, Matemáticas 4), y así la serie es convergente. Las series $\sum x_n$ y $\sum y_n$ no convergen absolutamente y así $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$ no converge absolutamente.

11. Clase 11. Funciones Elementales

11.1. Función exponencial

Deseamos definir la función exponencial e^z, donde z es un número complejo. Ella debe incluir como caso especial la función exponencial real e^x, donde x es real. Usando la fórmula de Euler definimos

Definición 11.1. Si $z = x + iy$, la función exponencial compleja e^z por

$$e^z = e^{x+iy} e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

es decir, la definimos por

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Cuando z es real $y = 0$, $z = x$ y es $e^z = e^x$ (Real). Para $z = 0$ es $e^z = 1$

11.2. Propiedades de la función exponencial

a) Si $z_1 = x_1 + iy_1$ y $z_2 = x_2 + iy_2$ se cumple que $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$. La demostración se puede hacer usando la definición e identidades trigonométricas.

b) Para todo $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$ es $e^z \neq 0$, $|e^z| = e^x$. Para $z = x + iy$, $-z = -x - iy$, efectuando $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$. Así ningún factor puede ser cero. Además $|e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$ y $|e^z| = |e^x e^{iy}| = e^x$, ya que $e^x > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$

c) Para $z \in \mathbb{C}$ es $e^z = 1$ si y sólo si $z = 2k\pi i$, k entero. Si $z = 2k\pi i$ será $e^z = e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi$. Si $e^z = 1$, hacemos $z = x + iy$ y se obtiene que $e^x \cos y + e^x \sin y = 1$. Así $e^x \cos y = 1$, $e^x \sin y = 0$. De esta última, por ser $e^x > 0$, se tiene que $\sin y = 0$, luego $y = n\pi$, n entero. Observando que $\cos k\pi = (-1)^n$, sustituyendo tenemos que $e^x(-1)^n = 1$, es decir, n es par $n = 2k$, k entero, y de $e^x = 1$ es $x = 0$. Luego $z = x + iy = 0 + in\pi = 2k\pi i$.

11.3. Funciones Trigonométricas

De las fórmulas $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$; $e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i \sin\alpha$ se obtienen

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \\ \cos\alpha &= \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \end{aligned}$$

extenderemos estas funciones reales a funciones de variable compleja con la siguiente definición

1. Para cualquier número complejo z, definimos

$$\begin{aligned}\sin z &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\\ \cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\end{aligned}$$

2. Si $\sin z = 0$ entonces $z = n\pi$, n entero. Si $\cos z = 0$, entonces $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$, n entero. En otras palabras los ceros de las funciones complejas seno y coseno son exactamente los ceros de las funciones reales seno y coseno. La demostración consiste en usar la definición: si $\sin z = 0$ es $e^{iz} - e^{-iz} = 0$, $e^{2iz} = 1$. Luego $2iz = 2k\pi i$, k entero. Luego $z = n\pi$. La demostración para los $z = 0$ es similar.

3. Definimos

$$\begin{aligned}\tan z &= \frac{\sin z}{\cos z},\ z \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\\ \cot z &= \frac{\cos z}{\sin z},\ z \neq n\pi\\ \sec z &= \frac{1}{\cos z},\ z \neq \frac{\pi}{2} + n\pi\\ \csc z &= \frac{1}{\sin z},\ z \neq n\pi\end{aligned}$$

   La parte real y la parte imaginaria de las funciones seno y coseno vienen dadas por

4.

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

$$\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$$

   Para demostrar la primera de ellas, recordamos las funciones hiperbólicas reales $\cosh y =$

$\frac{e^y+e^{-y}}{2}$, $\sinh y = \frac{e^y-e^{-y}}{2}$, y de la definición de la función seno es

$$\begin{aligned}
2i\sin z &= \\
&= e^{iz} - e^{-iz} = e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)} \\
&= e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x) \\
&= i\sin x(e^y + e^{-y}) - \cos x(e^y + e^{-y}) \\
&= 2i\sin x\cosh y - 2\cos x\sinh y
\end{aligned}$$

despejando es

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin x\cosh y - \frac{1}{i}\cos x\sinh y \\
\sin z &= \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y
\end{aligned}$$

La prueba para el coseno es similar. Fácilmente se prueba que

$$\begin{aligned}
|\sin z|^2 &= \sin^2 x + \sinh^2 y \\
|\cos z|^2 &= \cos^2 x + \sinh^2 y \\
\sin iy &= i\sinh y \\
\cos iy &= \cosh y
\end{aligned}$$

y también las identidades estándar para funciones trigonométricas, por ejemplo:

$$\begin{aligned}
\sin^2 z + \cos^2 z &= 1 \\
\sin(z+w) &= \sin z\cos w + \cos z\sin w \\
\cos(z+w) &= \cos z\cos w - \sin z\sin w \\
\sin 2z &= 2\sin z\cos z \\
\cos 2z &= \cos^2 z - \sin^2 z.
\end{aligned}$$

11.4. Funciones Hiperbólicas

Por analogía al caso real definimos las funciones hiperbólicas complejas de la siguiente forma

I) Para cualquier número complejo z, definimos

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

II) Si $\sinh z = 0$, entonces $z = n\pi i$, n entero. Si $\cosh z = 0$, entonces $z = (n + \frac{1}{2})\pi i$, n entero. Observamos que los ceros del $\sinh z$ y del $\cosh z$ son números imaginarios puros.

III) Las otras funciones hiperbólicas se definen por:

$$\begin{aligned}
\tanh z &= \frac{\sinh z}{\cosh z}, \ z \neq (n + \frac{1}{2})\pi i \\
\coth z &= \frac{1}{\tanh z}, \ z \neq n\pi i \\
\text{sech} z &= \frac{1}{\cosh z}, \ z \neq (n + \frac{1}{2})\pi i \\
\text{csch} z &= \frac{1}{\sinh z}, \ z \neq n\pi i
\end{aligned}$$

n entero.

IV) La parte real y la parte imaginaria de las funciones $\sinh z$ y $\cosh z$ se obtienen con una técnica similar al caso trigonométrico y son dadas por:

$$\begin{aligned}
\sinh z &= \sinh(x + iy) = \cos y \sinh x + i \sin y \cosh x \\
\cosh z &= \cos y \cosh x + i \sin y \sinh x
\end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned}
|\sinh z|^2 &= \sin^2 y + \sinh^2 x \\
|\cosh z|^2 &= \cos^2 y + \sinh^2 x \\
\cosh^2 z - \sinh^2 z &= 1 \\
\sinh 2z &= 2 \sinh z \cosh z \\
\cosh 2z &= \cosh^2 z + \sinh^2 z
\end{aligned}$$

11.5. Función Logaritmo

Mostraremos que la función $f(w) = e^w$ toma todos loa valores complejos excepto el valor cero, y usaremos la notación $\text{Ln}\,|z|$ para representar el logaritmo natural real del número positivo $|z|$, $z \neq 0$, $z = x + iy$

I **Teorema:** Para cualquier número complejo $z \neq 0$ existe un número complejo w tal que $e^w = z$

Demostración : Escribimos el número complejo $z \neq 0$, $z = x + iy$ en forma polar $z = |z|e^{i\theta}$, donde $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \text{Arg}\,(z)$, $-\pi < \theta \leq \pi$ el valor principal del argumento. Sea $w = \text{Ln}\,|z| + i\text{Arg}\,(z) + 2n\pi i$, n entero, y probemos que $e^w = z$. En efecto, $e^w = e^{\text{Ln}\,|z|}e^{i\text{Arg}\,(z)}e^{2n\pi i} = |z|e^{i\theta} = z$, ya que $e^{2n\pi i} = 1$. □

II **Definición:** Sea $z \neq 0$ cualquier número complejo. Si w es un número complejo tal que $e^w = z$, se dice que w es el logaritmo de z y se denotará por $w = \ln z$. Se tiene que $\log z = \text{Ln}\,|z| + i\text{Arg}\,(z) + 2n\pi i$, con $-\pi < \text{Arg}\, z \leq \pi$ y n entero. El valor principal del logaritmo, denotado por $\text{Ln}\, z$ es $\text{Ln}\, z = \text{Ln}\,|z| + i\text{Arg}\,(z)$, $-\pi < \text{Arg}\, z \leq \pi$. Observamos que $w = \ln z$ tiene infinitos valores para cada valor de z, $z \neq 0$, luego no es una función, mientras que $w = \text{Ln}\, z$ sí es una función.

III **Definición:** Sean $z \neq 0$ y w cualquier número complejo, definimos z^w por

$$z^w = e^{w \ln z}$$

El valor principal de z^w se define por $e^{w\text{Ln}\, z}$. Por ejemplo tomando los valores principales

$$\begin{aligned} (-i)^{2i} &= e^{2i\text{Ln}\,(-i)} = e^{2i(-\frac{i\pi}{2})} = e^{\pi} \\ (-1)^{i} &= e^{i\text{Ln}\,(-1)} = e^{i(i\pi)} = e^{-\pi} \end{aligned}$$

IV **Nota:** No es cierto que $\text{Ln}\,(zw) = \text{Ln}\, z + \text{Ln}\, w$. Por ejemplo, para $z = i$, $w = -1 + i$ se calcula

$$\begin{aligned} \text{Ln}\, z &= \text{Ln}\,(i) = \text{Ln}\,|i| + i\text{Arg}\,(i) = \text{Ln}\,(1) + i\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}i \\ \text{Ln}\, w &= \text{Ln}\,(-1+i) = \text{Ln}\,|-1+i| + i\text{Arg}\,(-1+i) = \frac{1}{2}\text{Ln}\,(2) + i\frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Además $zw = i(-1+i) = -1-i$, y así $\text{Ln}(zw) = \text{Ln}(-1-i) = \text{Ln}|-1-i| + i\text{Arg}(-1-i) = \frac{1}{2}\text{Ln}\,(2) - i\frac{3}{4}\pi$. Es claro que $\text{Ln}\,(zw) \neq \text{Ln}\, z + \text{Ln}\, w$

12. Clase 12. Funciones Analíticas

Definición 12.1. Sea $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ un conjunto. Sea z_0 un punto fijo en $\mathcal{D}$, y sea f una función $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Se dice que f tiene derivada en el punto $z_0 \in \mathcal{D}$ si existe el siguiente límite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

En este caso el número definido por este límite, denotado $f'(z_0)$, se le llamará la derivada de la función f en el punto z_0 y diremos a veces que f es derivable en z_0. Escribimos

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{df}{dz}(z_0)$$

La función f se dice analítica en $\mathcal{D}$ si f es derivable en todo punto de $\mathcal{D}$.

12.1. Propiedades de la derivada

Las propiedades y las reglas formales para derivar funciones complejas son similares a las conocidas que se aplican a funciones de variable real. Así escribimos las siguientes propiedades

Teorema 12.2. I Si f es derivable en el punto z_0, entonces f es continua en z_0. La demostración es igual que en el caso real. El recíproco no es cierto. La función $f(z) = |z|^2$ es continua en todo punto de $\mathbb{C}$, mientras que f sólo es derivable en el origen. ¿Puedes probarlo?

II Si las funciones f y g son analíticas en $\mathcal{D}$, entonces las funciones $f \pm g$, fg y $\dfrac{f}{g}$ $(g(z) \neq 0$ en $\mathcal{D})$ son analíticas en $\mathcal{D}$ y

- $(f \pm g)' = f' \pm g'$.
- $(fg)' = f'g + fg'$.
- $(\frac{1}{g})' = -\frac{g'}{g^2}$, $g(z) \neq 0$ en $\mathcal{D}$.
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, $g(z) \neq 0$ en $\mathcal{D}$.

Usando la definición de derivada fácilmente se prueba

III La función f es derivable en el punto z_0 si y sólo si f satisface una ecuación de la forma

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)[k + \lambda(z)]$$

donde k es una constante y $\lambda(z)$ es una función tal que

$$\lim_{z\to z_0} \lambda(z) = 0$$

Claramente $k = f'(z_0)$

IV Usando (III) igual que en el caso real se prueba la siguiente regla de la cadena: Sean $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y $g : \mathcal{U} \subset \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}$ tale que $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{U}$. Supongamos que f y g son funciones analíticas, entonces la compuesta $h(z) = g(f(z))$ es analítica (en $\mathcal{D}$) y la derivada está dada por

$$h'(z) = g'(f(z))f'(z)$$

12.2. Condiciones de Cauchy-Riemann

Consideremos la función $w = f(z)$, $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ escribiendo $f(z) = u(z) + iv(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, denotamos las derivadas parciales de las funciones u y v por u_x, u_y, v_x y v_y. Podemos probar:

Teorema 12.3 (Condiciones de Cauchy-Riemann)**.** Si la función f es analítica en $\mathcal{D}$ entonces la cuatro derivadas parciales u_x, u_y, v_x y v_y existen y se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

en cada punto de $\mathcal{D}$.

Demostración : Para demostrarlo fijamos un punto $z_0 \in \mathcal{D}$, $z_0 = x_0 + iy_0$. Como $f'(z_0)$ existe, el siguiente límite existe

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Calculamos este límite en dos direcciones diferentes. Primero a lo largo de la línea paralela al eje real, pasando por el punto, $y = y_0$. Así $\Delta\, z = z - z_0 = x - x_0 = \Delta\, x$. Sustituyendo

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta\, x\to 0} \frac{u(x_0 + \Delta\, x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta\, x} + i \lim_{\Delta\, x\to 0} \frac{v(x_0 + \Delta\, x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta\, x}$$

Como $f'(z_0)$ existe, las derivadas parciales u_x, v_x existen y $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Análogamente tomando la recta $x = x_0$ paralela al eje de las ordenadas se tiene que $\Delta\, z = z - z_0 = i(y - y_0)$. Sustituyendo

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta\, y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta\, y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta\, y} + \lim_{\Delta\, y \to 0} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta\, y) - v(x_0, y_0)}{\Delta\, y}$$

Luego las derivadas parciales u_y, v_y existen y $f'(z_0) = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Al existir $f'(z_0)$, estos dos valores son iguales y se tiene la forma compleja de las condiciones de Cauchy-Riemann $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Igualando partes reales y partes imaginarias

$$\begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Como z_0 era cualquier punto (fijo) de $\mathcal{D}$, la demostración es válida para todo punto de $\mathcal{D}$.

$\square$

12.3. Teorema de Cauchy-Riemann

Teorema 12.4 (Cauchy-Riemann)**.** La función $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, es analítica en $\mathcal{D}$ es analítica en $\mathcal{D}$ si y sólo si las cuatro derivadas parciales u_x, u_y, v_x y v_y existen, son continuas y se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\begin{aligned} u_x &= v_y \\ u_y &= -v_x \end{aligned}$$

en todo punto de $\mathcal{D}$.

Demostración : $\square$

12.4. Funciones Armónicas

Definición 12.5. La función real $u = u(x, y)$ se dice armónica en $\mathcal{D}$ si para todo punto (x, y) en $\mathcal{D}$ las derivadas parciales segundas u_{xx} y u_{yy} existen, son continuas y se satisface la ecuación diferencial de Laplace

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

Obtenemos así el siguiente teorema

Teorema 12.6. Si la función $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ es analítica en $\mathcal{D}$ entonces las funciones u y v son armónicas en $\mathcal{D}$.

Demostración : Por ser f analítica en $\mathcal{D}$, se satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $\mathcal{D}$, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Derivando la primera respecto de x y la segunda respecto de y se obtiene

$$u_x x = v_y x \qquad u_y y = -v_x y$$

como las derivas cruzadas son iguales será $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Es decir, la parte real de f es armónica. Además por ser f analítica, entonces $-if = v(x,y) - iu(x,y)$ también es analítica en $\mathcal{D}$, así que $v(x,y)$ también es armónica en $\mathcal{D}$. $\square$

Esto nos lleva a la siguiente definición

Definición 12.7. Si u y v son funciones armónicas en $\mathcal{D}$, $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ tales que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es analítica en $\mathcal{D}$, se dirá que $v = v(x,y)$ es la conjugada armónica de u.

12.5. Ejercicios

a) Considere la función $u(x,y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$. Determinar su conjugada armónica $v(x,y)$ y la función analítica $f(z) = u(z) + iv(z)$

Solución. Derivando parcialmente es

$$\begin{aligned} u_x &= e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x\cos y \\ u_y &= e^x(-x\sin y - \sin y - y\cos y) \end{aligned}$$

usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann$u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$, se obtiene

$$\begin{aligned} v_y &= e^x(x\cos y - y\sin y) + e^x\cos y \\ v_x &= e^x(x\sin y + \sin y + y\cos y) \end{aligned}$$

Integrando

$$\begin{aligned} v(x,y) &= \int v_x\,dx + \varphi(y) = \int (e^x x\sin y + e^x\sin y + e^x y\cos y)\,dx + \varphi(y) \\ &= e^x(x-1)\sin y + e^x\sin y + e^x y\cos y + \varphi(y) \\ &= xe^x\sin y + e^x y\cos y + \varphi(y) \end{aligned}$$

Derivando respecto de y e igualando a v_y se obtiene que $\varphi'(y) = 0$, $\varphi(y) = C$, y así $v(x,y) = e^x(x\sin y + y\cos y) + C$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= e^x(x\cos y - y\sin y) + ie^x(x\sin y + y\cos y), \quad (C=0) \\ &= e^x[x(\cos y + i\sin y) + iy(\cos y + iy\sin y)] \\ &= e^x[e^{iy}(x+iy)] = e^{x+iy}(x+iy) \\ f(z) &= ze^z \end{aligned}$$

b) Sea $f(z)$ una función analítica en $\mathbb{C}$. Si $\arg f$ es constante, pruebe que f es constante.

Solución. Suponemos que $f = u + iv$. De $\tan\arg f \equiv ctte$ se obtiene que $v(x,y) = ku(x,y)$, k constante. Suponemos $u \neq 0$. Si $u = 0$ es $u_x = u_y = 0 = v_x = v_y$, y así es $u = c_1$, $v = c_2$ y $f = c_1 + ic_2$ es constante.

Derivando $v = ku$ es $v_x = ku_x$, $v_y = ku_y$ con las ecuaciones de Cauchy-Riemann$u_x = v_y$, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} u_x &= ku_y \\ u_y &= -ku_x \end{aligned}$$

Luego $u_x + k^2u_x = 0$, $(1+k^2)u_x = 0$ implica que $u_x = 0$. También $u_y = 0$ y por Cauchy-Riemann$v_x = 0 = v_y$. Luego $u(x,y) = c_1$, $v(x,y) = c_2$, y por tanto $f = c_1 + ic_2 = c$, f constante.

c) Muestre que la función $\operatorname{Ln} z$ es analítica en $\mathbb{C}$, excepto los puntos del eje real negativo y el cero.

Solución. El valor principal del logaritmo es $w = f(z) = \operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z| + i\operatorname{Arg} z$, donde $z \neq 0$, $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$. Suponemos que las u y v se expresan en coordenadas polares (r,θ) y que las derivadas parciales u_r, u_θ, v_r, v_θ son continuas. Aquí $u = \operatorname{Ln}\sqrt{x^2+y^2}$ y $v = \operatorname{Arg} z = \theta$.

Las ecuaciones de Cauchy-Riemannen coordenadas polares serían

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{r}v_r \\ v_r &= -\frac{1}{r}u_\theta \end{aligned}$$

que se satisfacen para nuestras funciones u y v.

La derivada de una función analítica, usando coordenadas polares es

$$\frac{dw}{dz} = (\cos\theta - i\sin\theta)w_r, \text{ (¡Demuéstralo!)}$$

y así

$$\frac{d(\operatorname{Ln} z)}{dz} = (\cos\theta - i\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r}\frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{r} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)} = \frac{1}{z}$$

Luego la función $\operatorname{Ln} z$ es analítica en $\mathbb{C}$, excepto los puntos del eje real negativo y el cero.

d) Obtenga el dominio donde la función $f(z) = \operatorname{Ln}(z^2+1)$ es analítica.

Solución. f es analítica en $\mathbb{C}$ excepto donde z^2+1 es real no positivo. De $z^2+1 = (x+iy)^2+1 = (x^2-y^2+1)+i(2xy)$ se tiene que f es analítica en $\mathbb{C}$ excepto donde $xy=0$ y $x^2-y^2+1 \leq 0$. Resolviendo, $x=0$ implica que $-y^2+1 \leq 0$, $1 \leq y^2$, $1 \leq |y|$. $y=0$ implica $x^2+1 \leq 0$, lo que es absurdo. Así f es analítica en $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) = 0, 1 \leq |\Im(z)|\}$ que corresponde a la figura (22)

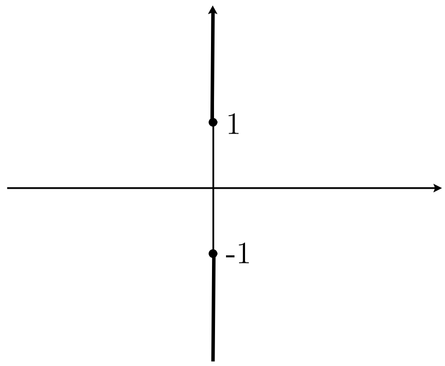

Figura 22: